حسین قاسم دامغانی
دانشجوی کارشناسی مهندسی پزشکی دانشگاه امیرکبیر

کمی وسیع‌تر فکر کنیم!

روند کشف روابط گسترده‌تر

اشاره

همیشه با خود فکر می‌کردم که کشف روابط ریاضیاتی کار بسیار سختی است و با پیشرفت‌هایی که در زمینهٔ علوم ریاضی انجام شده است، دیگر جایی برای خلق مطلبی نوین، به‌خصوص برای یک دانش‌آموز، وجود ندارد؛ به‌ویژه به دلیل آنکه مطالبی که تا سطح متوسطه به ما می‌آموزند، در مقابل علم امروز بسیار ابتدایی هستند. در این راه اما قدم برداشتم تا بلکه بتوانم در مسیر افزودن به این علم موفق شوم و به نتایج جالبی رسیدم.

کلیدواژه‌ها **واسطه هندسی، واسطه حسابی، اتحاد، مربع کامل**

تلاش‌های ناکام، اما آموزنده

در دبستان توجهم به ضرب عددها در ۵ جلب شد. وقتی داریم: ۲۰=۵×۴، رابطهٔ خاصی بین دهگان حاصل و یکان ضریب ۵ وجود دارد و نصف آن است! رقم‌های زوج دیگر را نیز امتحان کردم و از کشف خود بسیار خوش‌حال شدم! به سراغ رقم‌های فرد رفتم و دیدم که درست است که دهگان آن، دقیقاً نصف آن نیست، اما وقتی داریم ۳۵=۵×۷، این معادله هم برقرار است: $۳/۵ = \frac{۷}{۲}$. پس به‌طور کلی نتیجه گرفتم: برای اینکه عدد را سریع‌تر در ۵ ضرب کنم، کافی است اول نصف آن را حساب کنم، سپس آن را در ۱۰ ضرب کنم (چرا که نصف کردن یک عدد از ۵ برابر کردن آن بسیار

ساده‌تر اســت و ۱۰ برابر کردن هم اصلاً به فکر کردن نیازی ندارد!). اما به زودی متوجه شدم که کمی جلوتر خود کتاب به این موضوع اشاره کرده است!

در دوران راهنمایی با فرمول جمع عددهای پشــت سر هم آشنا شدم که چنین بود:

$$\sum_{i=۱}^{n} i = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

و به ذهنم خطور کرد که جمع عددهای فرد پشت سر هم چگونه خواهد بود (چــرا عددهای فرد؟ زیرا جمع عددهای زوج، دو برابر جمع عددهای پشــت ســر هم خواهد بود و رابطهٔ جدیدی ندارد.) پس با خودم حساب کردم:

۱+۳=۴

۱+۳+۵=۹

۱+۳+۵+۷=۱۶

...

و با پدیدهٔ جدیدی آشــنا شدم: جمع آن‌ها عددهای مربع کامل بــود که البته کتاب جبــر و احتمال آب پاکــی را روی دســتم ریخت که رابطــه‌ای معروف و چنین است:

$$\sum_{i=۱}^{n}(۲i-۱)=n^{۲}$$

جرقه‌ای نو

از ســال اول متوســطه که با اتحادها آشنا شدم، به دنبال این بودم که اتحــادی جدید از خودم ارائه بدهم. تا اینکه در ســال پیش‌دانشگاهی، روزی می‌خواستم به یاد بیاورم که برای هر دو عدد حقیقی مثبت نامســاوی، واسطهٔ حســابی آن‌ها بزرگ‌تر است یا واسطهٔ هندسی. پس خواستم برای خودم مثالی بیاورم که البته محاسبهٔ ذهنی آن بســیار راحت باشــد، پس بایــد دو عددی را انتخاب می‌کردم که هم جفتشــان مربع کامل باشــند (تا واســطهٔ هندسی راحت محاسبه شود) و هم اینکه یا جفتشان فرد باشند یا جفتشان زوج (تا واسطهٔ حسابی راحت محاسبه شود). پس ۱ و ۹ را انتخاب کردم و دیدم:

$$\frac{۱+۹}{۲}=۵,$$
$$\sqrt{۱\times ۹}=۳$$

به یاد آوردم که واســطهٔ حسابی همیشه بزرگ‌تر خواهد بود، اما چیز دیگری نظر مرا جلب کرد: واســطهٔ حســابی و هندسی درست یک واحد قبل و بعد عددی مربع کامل (۴) بودند:

$$۳ \xleftarrow{-۱} ۴ \xrightarrow{+۱} ۵$$
$$\sqrt{(۱)^{۲}(۳)^{۲}} \xleftarrow{-(۱)^{۲}} (۲)^{۲} \xrightarrow{+(۱)^{۲}} \frac{(۱)^{۲}+(۳)^{۲}}{۲}$$
$$\sqrt{(۲-۱)^{۲}(۲+۱)^{۲}} \xleftarrow{-(۱)^{۲}} (۲)^{۲} \xrightarrow{+(۱)^{۲}}$$
$$\frac{(۲-۱)^{۲}+(۲+۱)^{۲}}{۲}$$

دو عدد ۹ و ۴۹ را هم انتخاب کردم تا ببینم چنین چیزی اتفاق می‌افتد یا خیر:

$$\frac{۹+۴۹}{۲}=۲۹$$
$$\sqrt{۹\times ۴۹}=۲۱$$

این‌بار نتیجه مرا شــگفت‌زده کــرد. زیرا عددهای حاصل‌شــده، ۴ واحد قبل و بعــد از مربع کاملی (۲۵) بودند و خود ۴ نیز مربع کامل بود:

$$۲۱ \xleftarrow{-۴} ۲۵ \xrightarrow{+۴} ۲۹$$
$$\sqrt{(۳)^{۲}(۷)^{۲}} \xleftarrow{-(۲)^{۲}} (۵)^{۲} \xrightarrow{+(۲)^{۲}} \frac{(۳)^{۲}+(۷)^{۲}}{۲}$$

در مــورد کمتر بودن از مربع کامل به اتحاد مزدوج رسیدم:

$$y^{۲}-x^{۲}=(y-x)(y+x)$$

اما برای بیشــتر بودن از مربع کامل، ســعی کردم رابطه‌ای میان آن‌ها پیدا کنم و از روی الگوی محاسبات به این اتحاد رسیدم:

$$x^{۲}+y^{۲}=\frac{(x-y)^{۲}+(x+y)^{۲}}{۲}$$

کــه در مثــال اول: $y=۱$ و $x=۲$ و در مثال دوم: $y=۲$ و $x=۵$.

این اتحاد جدیدی نیســت، اما ســعی کردم با تعمیم دادن آن، به اتحادی «واقعاً جدید» برســم. یا به‌عبارت

همیشه با خود فکر می‌کردم با پیشرفت‌هایی که در زمینهٔ علوم ریاضی انجام شده است، دیگر جایی برای خلق مطلبی نوین، به‌خصوص برای یک دانش‌آموز، وجود ندارد!

دیگر، سعی کردم *وسیع‌تر فکر کنم!* پس کوشیدم مخرج کسر معادله را در دل یک متغیر جدید جای بدهم. با جای‌گذاری z به‌جای ۲، قطعاً به یک اتحاد جدید نمی‌رسیم، اما می‌تواند در سه متغیره کردن این اتحاد به ما کمک کند. با جای‌گذاری داریم:

$$x^۲+y^۲=\frac{(x-y)^۲+(x+y)^۲}{z}$$
$$\Rightarrow zx^۲+zy^۲=۲x^۲+۲y^۲$$

قاعدتاً اگر z=۲ باشد، شرایط معادله ارضا می‌شود، اما به دنبال حذف این شرایط هستیم. پس باید در ضرایب yها و x ها تجدیدنظر کنیم. اما باید در نظر بگیریم که *در نهایت با جای‌گذاری ۲ به جای* ***z*** *به اتحاد اولیه‌مان برسیم.*

ضریب $y^۲$ در سمت چپ معادله، z است، اما اگر بخواهیم ضرایب y در $(x+y)^۲$ و $(x-y)^۲$ را به‌وسیلهٔ z تغییر بدهیم، در نهایت ضریب $z^۲$ تولید می‌کنند. پس باید در سمت راست معادله هم این را ایجاد کنیم. از الان به بعد برای ملموس‌تر بودن ضرایب سمت چپ و راست معادله، z مخرج را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم. بعد از آن ضریب $y^۲$ در سمت راست معادله را که ۱ است، با z-۱ جای‌گذاری می‌کنیم تا $z(z-۱)$ ایجاد $z^۲$ بکند.

$$z(x^۲+(z-۱)y^۲)=(x-y)^۲+(x+y)^۲$$
$$zx^۲+(z^۲-z)y^۲=۲x^۲+۲y^۲$$

بسیار خب، حال برای اینکه z را وارد سمت راست معادله کنیم، ابتدا همان ضریب $y^۲$ را دستخوش تغییر می‌کنیم. ابتدا در $(y+x)^۲$ ضریب y را به z-۱ تبدیل می‌کنیم تا نتایج را مشاهده کنیم:

$$z(x^۲+(z-۱)y^۲)=(x-y)^۲+(x+(z-۱)y)^۲$$
$$zx^۲+(z^۲-z)y^۲=$$
$$۲x^۲+(۱+z^۲-۲z+۱)y^۲+(-۲+۲z-۲)xy$$

از آنجا که باید: $z^۲-z=۱+z^۲-۲z+۱$، پس: z-۱=۱ که باید آن ۱ مناسب را پیدا کنیم تا جای‌گذاری مناسب را انجام دهیم. ضریب $(x-y)^۲$، ۱ است و همان ۱، داخل پرانتز ضریب $y^۲$ مشهود است.

پس به‌عنوان تغییر بعدی، ضریب $(x-y)^۲$ را به z-۱ تغییر می‌دهیم:

$$z(x^۲+(z-۱)y^۲)=(z-۱)(x-y)^۲+(x+(z-۱)y)^۲$$
$$zx^۲+(z^۲-z)y^۲=zx^۲+(z-۱+z^۲-۲z+۱)y^۲$$
$$+(-۲z+۲+۲z-۲)xy$$
$$zx^۲+(z^۲-z)y^۲=zx^۲+(z^۲-z)y$$

حال تمام ضرایب درست سر جای خودشان هستند و شرط z=۲ برای برقراری این معادله برداشته شد.

اکنون اگر بنویسیم:

$$z(x^۲+(z-۱)y^۲)=(z-۱)(x-y)^۲+(x-(z-۱)y^۲)$$

آن‌گاه به ازای تمامی مقادیر z (و x و y) این معادله برقرار است. پس این یک *اتحاد* است. از آنجا که z-۱ در این اتحاد بسیار دیده می‌شود، اگر با تغییر متغیر $z+۱ \rightarrow z$ آن را زیباتر کنیم، اتحاد جبری ما به این صورت خواهد بود:

$$(z+۱)(x^۲+zy^۲)=z(x-y)^۲+(x+zy)^۲$$

به یاد نیز داریم که با جای‌گذاری شرط اولیه‌مان، یعنی $z=۱ \rightarrow z=۲$ (تغییر متغیرمان را که فراموش نکرده‌اید؟!) به اتحاد اولیه‌مان می‌رسیم:

$$x^۲+y^۲=\frac{(x-y)^۲+(x+y)^۲}{۲}$$

سخن نهایی

پس آن‌قدر هم کشف روابط ریاضی سخت و دشوار نیست. مهم هم نیست که قبلاً کشف شده‌اند یا خیر یا این خود زیرمجموعهٔ یک اتحاد بسیار جامع‌تر است یا خیر. مهم این است که شما با اندیشهٔ خود به آن رسیده باشید. قطعاً هم تمام روابط جدیدی که در ریاضی کشف می‌شوند و مانند قضیهٔ فیثاغورس و قضیهٔ اویلر، دنیا را تغییر می‌دهند، از همین اندیشه و *وسیع فکر کردن‌ها* شروع می‌شوند. بنابراین از کشف روابط ریاضیاتی ناامید نشوید و به جست‌وجو، کاوش و بازی با متغیرها ادامه دهید!